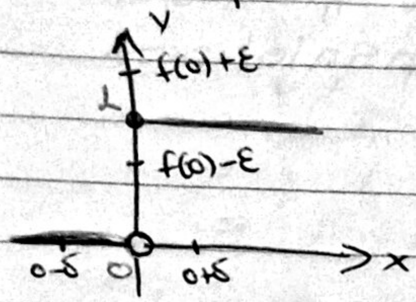
ΣΥΝΕΧΕΙΑ (A) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
και η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\geq 0\end{cases}$$

Με Γf:



Επανάληψη ορισμού 1ος
f συνεχής στο $x_0=0 \iff$
$\iff \{$αν $x_\nu \to 0 \Rightarrow f(x_\nu)\to f(0)=1\}$

Στο παράδειγμα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$
αφού πχ $-\frac{1}{\nu}\to 0$ και $f(-\frac{1}{\nu})=0\neq f(0)=1$

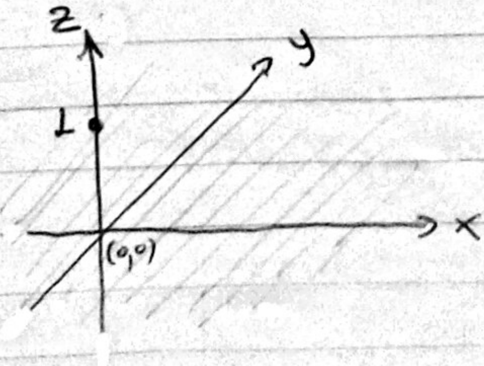
Επανάληψη ορισμού 2ος
f συνεχής στο $x_0=0 \iff$
$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ \forall x\in(-\delta,\delta)\subset \underbrace{U}_{\text{π.ο. της } f} : f(x)\in(f(0)-\varepsilon, f(0)+\varepsilon)$

Προσοχή!
ο παραπάνω 2ος ορισμός είναι ισοδύναμος με τον ορισμό που μάθαμε στον Απειροστικό 1:
f συνεχής στο $x_0=0 \iff$
$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\Delta_f): |x-0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(0)|<\varepsilon$.

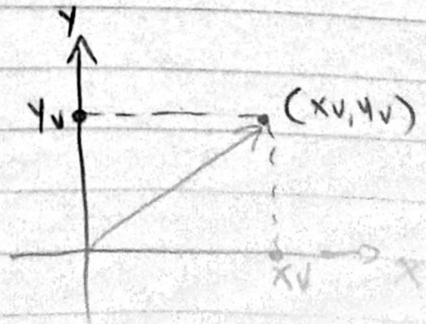
ΣΥΝΕΧΕΙΑ: (B) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
και η συνάρτηση:

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)=(0,0)\\ 0, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

Με Γf:



Με ακολουθίες



Η απόσταση του σημείου (x_ν, y_ν) από το $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ δίνεται από το μήκος του διανύσματος:

$\underbrace{(x_\nu, y_\nu) - (x_0, y_0)}$ $\in \mathbb{R}^2$ δηλ. είναι

$= (x_\nu - x_0, y_\nu - y_0)$ με μέτρο ίσο με

$$\sqrt{(x_\nu - x_0)^2 + (y_\nu - y_0)^2} = \|(x_\nu - x_0, y_\nu - y_0)\|$$

Ευκλείδεια **Νόρμα**

Ορισμός (Νόρμα):

Εάν $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε ο πραγματικός αριθμός

$$\|\overline{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \text{ . (Ευκλ. Νόρμα του } \overline{x})$$

Αφού λοιπόν έχουμε μια έννοια απόστασης μεταξύ 2 σημείων (ή διανυσμάτων) του $\mathbb{R}^2$ (και γενικά του $\mathbb{R}^n$) μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό εις συνέχειας μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ στο $A(x_0, y_0)$ τότε:

f συνεχής στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \iff$

$\iff \{$αν $(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \Rightarrow f(x_\nu, y_\nu) \to f(x_0, y_0)\}$

$\iff \|(x_\nu - x_0, y_\nu - y_0)\| \to 0$

ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ (ϵ-δ ορισμός)

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \iff$

$\iff (\forall \varepsilon > 0), (\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$ με $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{f(x, y) \in (f(x_0, y_0) - \varepsilon, f(x_0, y_0) + \varepsilon)}_{|f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1°

«Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ $\mathbb{R}^n$»

Αντιστοιχούμε τα σημεία του $\mathbb{R}^3$ (και γενικά στον $\mathbb{R}^2$) σε διανύσματα $\overline{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, x_i, $i=1,2,\dots,n$ συντεταγμένες (ως προς τη συνήθη βάση $e_i=(0,\dots,\underset{i\text{ θέση}}{1},0,\dots,0)$ με $i=1,2,\dots,k$

Ως διανυσματικός χώρος ο $\mathbb{R}^n$ έχει 2 πράξεις:

α) $\oplus:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$: $\overline{x}\oplus\overline{y}:=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=$
$:=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

β) $\odot:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$: $\alpha\odot\overline{x}:=\alpha\cdot(x_1,\dots,x_n)=$
$:=(\alpha x_1,\dots,\alpha x_n)$

γ) Μεικτό $\rightsquigarrow$ $\overline{x}=x_1\cdot\overline{e_1}+x_2\,\overline{e_2}$

Ο $\mathbb{R}^n$ ως δ.χ με αυτές τις πράξεις (όπου είναι σαφώς ορισμένες) έχει τις εξής ιδιότητες:

$\oplus$:
- $\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})=(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}$ (Προσεταιριστικότητα)
- $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ (Αντιμεταθετικότητα)
- $(\exists\overline{0})$: $\overline{x}+\overline{0}=\overline{0}+\overline{x}=\overline{x}$ (ουδέτερο)
- $(\exists\overline{y}=-\overline{x})\rightsquigarrow$ $\overline{x}+(-\overline{x})=(-\overline{x})+\overline{x}=0$ (αντίθετος)

$\odot$:
- $a(\beta\overline{x})=(a\beta)\overline{x}$ (Προσεταιριστικότητα)
- $(a+\beta)\overline{x}=a\overline{x}+\beta\overline{x}$
- $(\exists\overline{1})$: $\overline{x}\cdot\overline{1}=\overline{1}\cdot\overline{x}=\overline{x}$ (ουδέτερο)
- $(\exists\overline{y}=\frac{1}{\overline{x}})\rightsquigarrow$ $\overline{x}\cdot\frac{1}{\overline{x}}=\frac{1}{\overline{x}}\,\overline{x}=1$ (αντίστροφος)

Τέλος, έχουμε και το μεικτό:
$a\cdot(\overline{x}+\overline{y})=a\overline{x}+a\overline{y}$

Παρατήρηση: Οι πραγματικοί αλλιώς θα λέγονται βαθμωτά μεγέθη.

Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται και μια άλλη πράξη, το εσωτερικό γινόμενο. $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$:

$$\overline{x}\cdot\overline{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=x_1y_1+\dots+x_ny_n$$

όπου έχουμε τις εξής ιδιότητες:

1η) $\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$ (συμμετρική)
2η) $(a\bar{x})\bar{y} = \alpha(\bar{x}\bar{y})$
3η) $\bar{x}(\bar{y}+\bar{z}) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z}$
4η) $\bar{x}\bar{x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ με $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Η 4η ιδιοτητα μας επιτρεπει να ορισουμε μια Νορμα (ή σταθμη) την Ευκλειδειο Νορμα: $\|\bar{x}\| = \sqrt{\bar{x}\cdot\bar{x}}$ μας δινει το μηκος του $\bar{x}$.

Η νορμα έχει τις εξής ιδιοτητες:

- $\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\|\bar{x}\| = 0 \overset{①}{\Leftrightarrow} \bar{x} = \bar{0}$

Αποδειξη: ① $(\Leftarrow)$ $\|(0,\dots,0,0)\| = (0,\dots,0,0)\cdot(0,\dots,0,0) = 0$

$(\Rightarrow)$ $\|\bar{x}\| = 0 \Rightarrow \|\bar{x}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \bar{x}\cdot\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_i^2 = 0 \Rightarrow x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$

- $\|a\bar{x}\| = |a|\cdot\|\bar{x}\|, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Αποδειξη

$$\|a\bar{x}\| = \sqrt{a^2 x_0^2 + a^2 \cdot y_0^2} = \sqrt{a^2(x_0^2 + y_0^2)} = |a|\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = |a|\cdot\|\bar{x}\|$$

- Τριγωνική Ανισότητα
$\|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|, \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

ΚΑΘΕ ΝΟΡΜΑ ΟΡΙΖΕΤΑΙ ΜΕΤΡΙΚΗ
Ευκλειδεια μετρική (αποστασου)
$d(\bar{x},\bar{y}) := |\bar{x} - \bar{y}|, \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$